Insigne visual
Revista Virtual de Diseño Gráfico

# DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA A LA GEOMETRÍA NO EUCLIDIANA, UNA TRANSFORMACIÓN DE LAS FORMAS GEOMÉTRICAS. PRIMERA PARTE.

Dra. Dina Rochman Beer
Profesor-investigador titular "C" del Departamento de Teoría y Procesos del Diseño,
Universidad Autónoma Metropolitana – Unidad Cuajimalpa.
***drochman@correo.cua.uam.mx***

Revista digital de diseño gráfico • Marzo - Junio 2013 • Año 2 Número 7 • ISSN:2007-3151
revistainsignevisual@yahoo.com.mx • www.insignevisual.buap.mx • Tel. 01 (222) 229 55 00 ext.
7970 Benemérita Universidad Autónoma de Puebla • Blvd. Valsequillo S/N Ciudad Universitaria
Fracc. Jardines de San Manuel, Puebla, Pue.

## Resumen

La descripción de las propiedades de los poliedros regulares llamados “cuerpos platónicos” que tienen como base los estudios realizados por Platón, dan lugar al tratado matemático y geométrico denominado “Los elementos de Euclides”.

Euclides escribió en el libro I de los elementos los cinco postulados sobre los cuales basó todos sus teoremas de la geometría Euclidiana, veintidós siglos después y a partir de varios modelos se llegó a la conclusión de que el quinto postulado es independiente de los otros cuatro y de que existen otras geometrías, las cuales las llamaron geometrías no Euclidianas.

El construir formas geométricas orgánicas que se fundamentan primero con la geometría Euclidiana para después transformarse en una geometría no Euclidiana, se manifiesta en la utilización de dos los cuerpos platónicos, el icosaedro y el tetraedro, y su relación con la media y extrema razón que Euclides describe en tres de sus proposiciones en los elementos.

Los resultados obtenidos en esta investigación dan lugar a un cambio significativo en el manejo de la geometría de las formas y su aplicación en el estudio del lenguaje del Diseño.

## Palabras clave

Número de oro, Rectángulo áureo, Icosaedro, Paraboloide hiperbólico.

## Introducción

Como sabemos, la geometría es una creación de la mente griega, sus orígenes se remontan a épocas anteriores en Mesopotamia y Egipto, y tiene su utilidad descriptiva, cuando Gaspar Monge, (1746-1818 ingeniero militar francés), realizó un análisis gráfico de la representación de los puntos en el espacio (sistema diédrico), y dio lugar a la ciencia que hoy conocemos como Geometría Descriptiva ***(1799), "Parte de las matemáticas que representan las proyecciones de las figuras planas en el espacio".***

Cuando hablamos de las figuras planas las asociamos con los polígonos regulares e irregulares y sus relaciones con los puntos y las rectas que están contenidas en un plano.

Un polígono es una figura geométrica conformada por segmentos consecutivos no alineados. En un polígono podemos distinguir sus lados, sus vértices y sus ángulos, y son clasificados por el número de sus lados.

Con la unión de varios polígonos podemos construir los poliedros. Definimos al poliedro como un cuerpo geométrico cuyas caras son poligonales y se clasifican en prismas y pirámides.

El prisma es un sólido determinado por dos polígonos como bases, regulares e irregulares, paralelas entre sí e iguales y con tantos paralelogramos como tenga su base. Entre los prismas tenemos al cubo y los prismas de base de diferentes lados.

La pirámide es un sólido determinado por un polígono como base, regular o irregular, y que al determinar su vértice se forman planos triangulares como aristas tengan la base. Entre las pirámides tenemos al tetraedro y las pirámides de base de diferentes lados.

El cubo y el tetraedro forman parte de los llamados "cuerpos platónicos" que junto con el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro son los cinco poliedros regulares.

Las propiedades de los poliedros regulares las encontramos en "Los elementos de Euclides". Los elementos es un tratado matemático y geométrico que se compone de trece libros representados en el sistema axiomático conocido como postulados de Euclides, los cuales dan lugar a la geometría Euclidiana, y que su contenido está dividido de la siguiente manera:

1. Los libros del I al IV tratan sobre la geometría plana

2. Los libros del V al X tratan sobre las razones y las proporciones, y

3. Los libros del XI al XIII tratan sobre la geometría de los cuerpos sólidos.

Para comprender la transformación de las formas geométricas, en este artículo primero se describe la construcción del icosaedro y su relación con la media y extrema razón que en los elementos de Euclides se explica en la proposición 30 del libro VI, en la proposición 1 del libro XIII y en el trazo del rectángulo áureo de Euclides, para después explicar el trazo del paraboloide hiperbólico que pertenece a la geometría no Euclidiana.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 1 se da una breve introducción al tema a tratar, en la sección 2 se explica y se ilustra la media y extrema razón de un segmento, proposición 30 del libro VI de los elementos de Euclides. En la sección 3 se explica y se ilustra la proposición 1 del libro XIII de los elementos de Euclides, en la sección 4 se explica y se ilustra el trazo del rectángulo áureo de Euclides. En la sección 5 se ilustra el trazo del icosaedro a partir de la media y extrema razón, en la sección 6 se ilustra la transformación de las formas geométricas para terminar con la sección 7 con las conclusiones.

Cabe mencionar que todas las figuras presentadas en este artículo son originales y fueron creadas por la autora en la Universidad Autónoma Metropolitana, Cuajimalpa.

## Media y Extrema Razón de un Segmento, Proposición 30 del Libro VI de los Elementos de Euclides.

La proporción se utiliza en relación a la proporción divina (división armónica o razón divina) que dice: ***"Dividir un segmento en media y extrema razón".*** En donde la división de un segmento AB en media y extrema razón (por un punto P) debe de cumplir la condición de que la media proporcional sea la parte mayor y la menor y el todo sea la extrema (extremos), es decir, menor/mayor = mayor/todo que da lugar a la ecuación cuadrática:

Cuya razón positiva es llamado el número de oro y que esta ecuación da lugar a la sucesión de Fibonacci (multiplicando sucesivamente por t).

Geométricamente encontramos la media y extrema razón de un segmento de magnitud , de la siguiente manera (cfr: Figura 1):

• Trazamos el segmento AB

• Trazamos el segmento perpendicular al segmento AB a partir del punto B de la misma magnitud que el segmento AB para encontrar el punto C.

• Encontramos el punto D que es el punto medio del segmento BC.

• Trazamos el segmento del punto A al punto D.

• Con la distancia de D a B y apoyándonos en el punto D trazamos un arco hasta que intersecte con el segmento AD, para encontrar el punto E.

• Con la distancia de A a E y apoyándonos en el punto A trazamos un arco hasta que intersecte con el segmento AB, para encontrar el punto F.

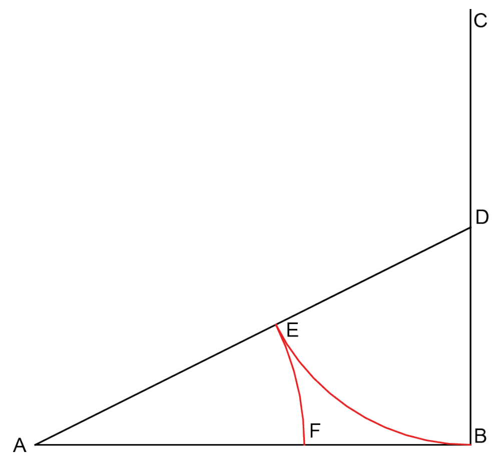


*Figura 1. Media y extrema razón de un segmento*

Expresamos matemáticamente esta proporción mediante la siguiente razón:

Esta razón la ejemplificamos con un segmento AB de magnitud 1 para encontrar el número de oro de la siguiente manera:

Comprobamos entonces geométrica y matemáticamente si el número de oro ( nos da en el siguiente ejemplo (ejemplo dos) cuyo segmento tiene una magnitud de 300 mm.

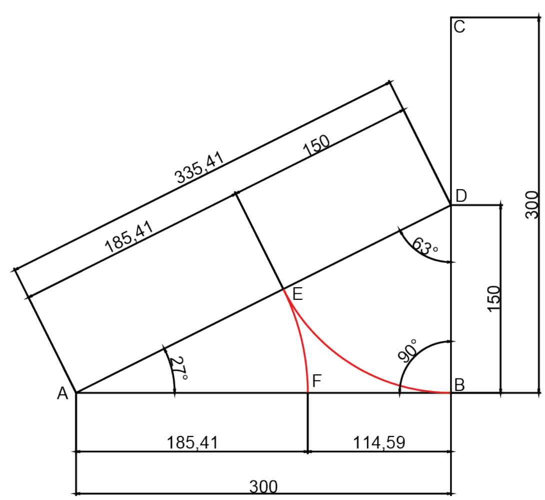


*Figura 2. Media y extrema razón de un segmento de magnitud 300 cm.*

Matemáticamente el segmento AD lo encontramos a partir del teorema de Pitágoras:

Geométricamente analizamos los giros que realizamos para encontrar las magnitudes correspondientes, recordando que si giramos una recta sobre su propio eje siempre conserva su verdadera magnitud, entonces giramos la recta BD cuya magnitud es de 150 mm hasta que su posición esté en un ángulo de 63° y sobre el segmento AD, y se encuentra la magnitud del segmento AE restando la magnitud de los segmentos AD menos BD.

Si giramos sobre su propio eje al segmento AE hasta que su posición esté horizontal y sobre el segmento AB, se encuentra la magnitud del segmento BF restando la magnitud de los segmentos AB menos AF.

Si calculamos el valor que se obtiene al dividir el segmento mayor entre el segmento menor obtenidos, debemos de encontrar la relación entre las dos partes en que dividimos el segmento inicial.

Como vemos, el resultado que se obtuvo es el número de oro y se cumple con la proposición 30 del libro VI de los elementos de Euclides, que dice:

***"Se dice que un segmento ha sido cortado en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor".***

## La Proposición 1 del Libro XIII de los Elementos de Euclides.

La proposición 1 del libro XIII de los elementos de Euclides dice:

***"Si se corta una línea recta en extremo y media razón, el cuadrado del segmento mayor junto con la mitad de la recta entera es cinco veces el cuadrado de la mitad".***

Para entender esta proposición primero realizaremos los trazos geométricos para después comprobarlo matemáticamente. Por lo que tomaremos la magnitud del segmento inicial de 300 mm, igual que el ejemplo dos de la sección 2, para así poder encontrar su relación.

Geométricamente encontramos el extremo y media razón de la siguiente manera (cfr: figura 3).

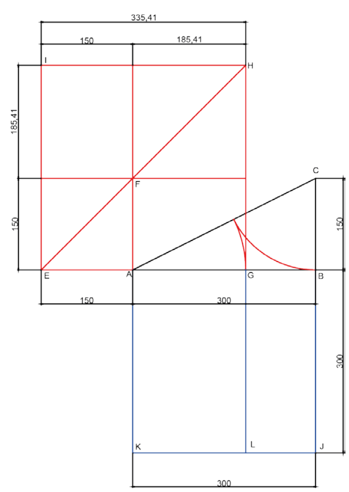


***Figura 3. Proporción 1 del libro XIII de los elementos de Euclides.***

- Trazamos el segmento AB
- Trazamos el segmento AE con una magnitud de AB/2
- Trazamos el segmento AF de la misma magnitud que AE perpendicular al segmento AB desde el punto A
- Trazamos el segmento EF
- Encontramos la media y extrema razón del segmento AB para encontrar el punto G
- Del punto G trazamos un segmento perpendicular al segmento AB con magnitud indefinida
- Prolongamos el segmento EF hasta que intersecte con el segmento GH
- Trazamos el segmento HI perpendicular al segmento GH con magnitud indefinida
- Trazamos el segmento EI paralelo al segmento GH hasta que intersecte con el segmento HI
- Trazamos los segmentos BJ , JK y KA hasta llegar a formar un cuadrado
- Trazamos el segmento GL perpendicular al segmento AB.

Una vez que tenemos todas las magnitudes de los segmentos podemos verificar matemáticamente la proposición 1 del libro XIII de los elementos de Euclides con los valores obtenidos, donde el segmento EA = 150 y el segmento HG = 335.41, son los encontrados con los trazos antes mencionados.

Como podemos ver el resultado obtenido cumple con la proposición 1 del libro 13 de los elementos de Euclides y las magnitudes de los segmentos encontrados son las mismas que las que encontramos en el ejemplo dos de la sección 2, así concluimos que no importando la magnitud del segmento que se haya utilizado hay una relación entre la proposición 30 del libro VI y la proposición I del libro XIII de los elementos de Euclides.

## El Rectángulo Áureo de Euclides

Euclides en su proposición 2.11 de los elementos construye el rectángulo áureo de la siguiente manera (cfr: figura 4):

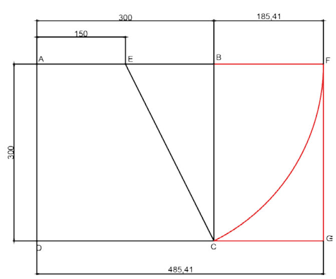


***Figura 4. Rectángulo áureo.***

• Se traza un cuadrado cuyos puntos son ABCD

• De la mitad del segmento AB, punto E, se traza una línea hacia el punto C.

• Con la distancia EC y apoyándose en el punto E, se traza un arco indefinido.

• Se prolonga el segmento AB hasta intersectar con arco para encontrar el punto F

• Del punto F se traza un segmento paralelo al segmento AD para encontrar el punto G.

• Se prolonga el segmento DC hasta intersectar con el punto G.

Matemáticamente encontramos la magnitud de la hipotenusa, segmento EC, utilizando el teorema de Pitágoras que dice: ***"En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".***

Comprobamos entonces geométrica y matemáticamente el mismo ejemplo dos de la sección 2, donde la magnitud del segmento del cuadrado es de 300 mm por lado.

Si calculamos el valor que se obtiene al dividir la magnitud de la hipotenusa entre la magnitud del lado del cuadrado, debemos de encontrar la relación entre las dos partes y esta relación es el número de oro.

Como podemos ver las magnitudes de los segmentos encontrados son las mismas que las que encontramos en el ejemplo dos de la sección 2, así concluimos que no importando la magnitud del segmento que se haya utilizado hay una relación entre la proposición 30 del libro VI, la proposición I del libro XIII de los elementos de Euclides y el rectángulo áureo de Euclides.

## Trazo del Icosaedro a Partir de la Media y Extrema Razón

El icosaedro es un polígono de 20 caras formado por triángulos equiláteros iguales entre sí y para su trazo tomamos en cuenta el mismo procedimiento que realizamos en la sección 4 para encontrar el rectángulo áureo.

Para el trazo del icosaedro se utilizan seis rectángulos áureos, en este ejemplo se utilizó un cuadrado de magnitud de 300 mm igual al que analizamos en la sección 4, en donde colocamos tres rectángulos áureos paralelos a los planos vertical, horizontal y lateral del diedro, girados de tal manera que la magnitud mayor del rectángulo áureo queda paralela a los planos del diedro y entre ellos forman un ángulo de 90°

Realizamos la misma colocación, pero en espejo, de los otros tres rectángulos áureos para así encontrar los puntos en el espacio que nos permitirán trazar los triángulos equiláteros que formarán al icosaedro (cfr: figura 5).

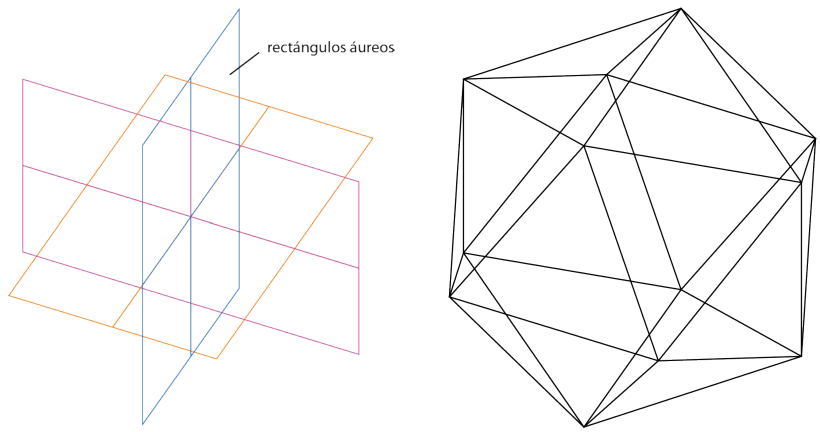


***Figura 5. (a) Trazo de los rectángulos áureos, (b) Trazo del icosaedro.***

## La Geometría no Euclidiana A Través de un Icosaedro.

Hemos estado hablando de la geometría Euclidiana y algunas de sus proposiciones.

Pero debemos de saber que esta geometría debe de satisfacer los cinco postulados que se encuentran en el Libro I de los elementos de Euclides:

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.

2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada o indefinida.

3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.

4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

5. Si una recta que corte a otras dos forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortan del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

Entonces, si diseñamos formas que solamente cumplen con los primeros cuatro postulados pero no con el quinto, entramos a lo que conocemos como la geometría no Euclidiana, y el primer ejemplo de ella es la geometría hiperbólica.

En la geometría hiperbólica se trabajan con curvas cónicas formadas por superficies regladas ya que se pueden trazar a partir de segmentos de rectas. Entre la geometría no Euclidiana encontramos también el trazo del paraboloide hiperbólico.

El paraboloide hiperbólico está generado por una recta que se apoya en dos líneas directrices y siempre se mantiene paralela a un plano llamado director. Los planos paralelos a la recta común de los planos directores producen secciones parabólicas mientras que todas las demás secciones son hiperbólicas. El paraboloide hiperbólico se define de la siguiente forma:

***"Es una superficie alabeada generada por el movimiento continuo de una recta (generatriz) que toca dos líneas oblicuas (directrices) y permanece paralela a un plano director."***

El paraboloide hiperbólico nos permite generar inagotables formas y una de ellas es la que podemos observar en la figura 7 en donde el icosaedro es el polígono regular que se utilizó como envolvente (cfr: figura 6a).

Si en cada uno de los triángulos equiláteros que forman el icosaedro trazamos un tetraedro (cfr: figura 6b), cuya magnitud es la de la arista de los triángulos equiláteros, tenemos veinte tetraedros que no se tocan por ninguna de sus caras debido a la inclinación de las caras del icosaedro. Como podemos observar en la figura 7, de cada una de las caras de dos tetraedros utilizamos dos de sus aristas para así poder generar las parábolas hiperbólicas.

Hoy en día utilizamos la impresora 3D para poder crear nuestros modelos de cualquier forma geométrica que queramos producir, la figura 8 nos muestra la impresión de icosaedro y su transformación a forma orgánica.

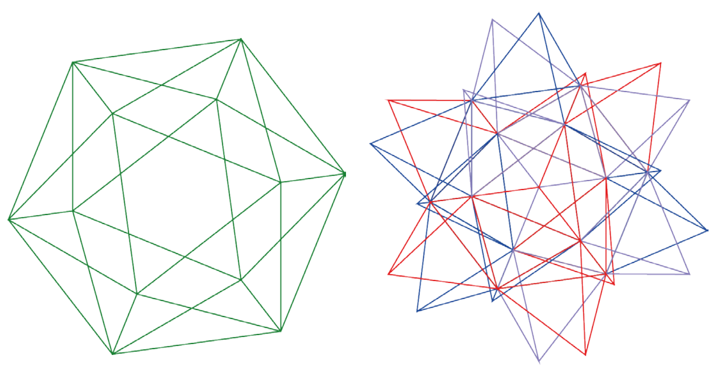

***Figura 6. (a) Trazo del icosaedro, (b) Trazo de los tetraedros.***

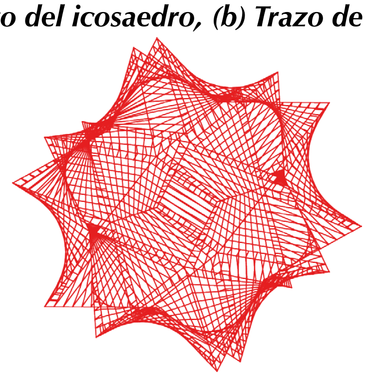

***Figura 7. Trazo de los paraboloides hiperbólicos.***

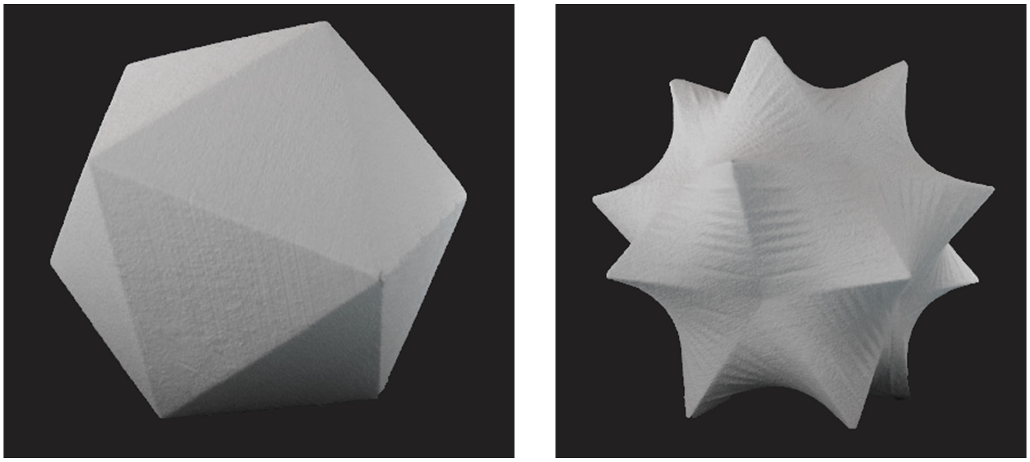

*Figura 8. (a) Modelo Euclidiano, (b) Modelo no Euclidiano*

## Conclusiones

Si consideramos que el lenguaje es un sistema de comunicación estructurado expresado mediante signos a través de la palabra y la escritura, su estudio, en el área del Diseño, se debe de estimar desde las matemáticas y la geometría de las formas.

Porque el diseño de las formas geométricas no se realiza a través de la intuición, sino que se realiza a través de la relación de las proporciones, y estas proporciones las encontramos en los sistemas axiomáticos que establece Euclides en su tratado de los elementos.

Si lo que queremos es llegar a diseñar formas geométricas orgánicas, que su trazo, insistimos, tampoco es intuitivo, debemos de tomarse en cuenta la geometría Euclidiana para fundamentarlas y la geometría no Euclidiana para transformarlas, dando así un cambio significativo en el manejo de la geometría de las formas y su aplicación en el estudio del lenguaje del Diseño.

Concluimos entonces que la geometría es perfección, matemática y que tiene su propia belleza y bien utilizada es insuperable.